VITTORIO EM. III

NAZIONALE
BIBLIOTECA
B. Prov.
Miscellanea
B
39
250
VITTORIO EM. III
NAPOLI

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio 2

Palchetto 4

Num.° d' ordine 9

NOUVELLE THÉORIE

DES

PARALLELES.

Cette Nouvelle Théorie se trouve :

A Angers, chez FOURIER-MAME.
Angoulême, chez BARGEAS et chez BROQUISSE.
Autun, chez DAUPHIN.
Bourg, chez VERNAREL et chez BOTTIER.
Bruxelles, chez LE CHARLIER.
Colmar, chez FONTAINE.
Clermont-Ferrand, chez ROUSSET.
Dijon, chez COQUET.
Dôle, chez JOLY.
Gand, chez DE GOESIN-VERHAEGHE.
Genêve, chez PASCHOUD.
Lafère, chez TRONQUOY.
Lille, chez VANACKERE.
Lyon, chez les frères PERISSE et chez SAVY.
Metz, chez DEVILLY.
Nancy, chez Mme BONTOUX.
Nismes, chez GAUDE et MELQUIOND.
Périgueux, chez Mme DUBREUIL.
Rennes, chez BLOUET.
Rouen, chez VALLÉE frères, et chez RENAULT.
Strasbourg, chez LEVRAULT, frères.
Toulouse, chez MANAVIT.
Tours, chez PESCHERARD et MAME.
Aux Sables, chez FERET.
Aix, chez CARRACCIOLI.
Bayonne, chez GOSSE et BONZOM.
Nantes, chez FORET.
Bordeaux, chez LAFITE.
Saint-Omer, chez HUGUET.
Dunkerque, chez FRÉMAUX.
La Rochelle, chez SANLECQUE.

678757
IBN

NOUVELLE THÉORIE

DES

PARALLELES,

AVEC UN APPENDICE

CONTENANT *la manière de perfectionner la Théorie des Parallèles de A. M.* LEGENDRE.

A PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-libraire, et propriétaire de la librairie mathématique de DUPRAT, quai des Augustins, n°. 71.

An XI — 1803.

AVANT-PROPOS.

Tous ceux qui ont approfondi les mathématiques ont dû reconnoître l'importance de la théorie des parallèles, et voir que les démonstrations relatives à cette théorie, sont loin d'avoir ce dégré d'évidence qui caractérise principalement les autres démonstrations en usage dans la géométrie élémentaire.

Euclide a bien démontré que deux lignes droites situées dans le même plan, et qui font avec une troisième deux angles intérieurs dont la somme est égale à deux angles droits, ne se rencontrent jamais, c'est-à-dire, sont parallèles. Mais il regarde comme axiome que deux lignes, coupées par une troisième, et de manière que la somme des angles internes soit plus grande ou plus petite que deux angles droits, se rencontreront en un point quelconque. Cette proposition, cependant, n'est pas assez évidente par elle-même pour être mise au rang des axiomes, quoiqu'elle ne soit que le réciproque de la

proposition précédente; et c'est précisément dans toute la difficulté de prouver cette proposition, que consiste l'imperfection de la théorie des parallèles.

Après avoir tenté en-vain de trouver la vérité par la voie des démonstrations géométriques, on eut recours aux règles de logique. L'idée de la position des lignes, de l'identité ou de la différence de direction, sont les principes sur lesquels la théorie des parallèles fût établie. Ces nouvelles considérations ont bien fixé l'attention du public, mais, pour parler franchement, elles ne contentent point le géomètre. La théorie des parallèles la plus moderne est celle de *Karsten*, l'un des plus fameux mathématiciens de l'Allemagne; elle a pour titre : *Tentamen novæ parallelarum theoriæ notione situs fundatæ; auctore G. C. Schwal Stuttgardæ*, 1801, en 8 volumes; mais elle a aussi l'inconvénient d'être fondée sur des idées de pure métaphysique. Cependant MM. Legendre (1), J. Hoffmann (2), Hauff (3),

(1) Dans ses élémens de géométrie.

(2) Essai d'une nouvelle théorie des parallèles. Offenbach, 1801.

(3) Essai d'une vérification de la théorie des

font espérer qu'on pourroit rendre la théorie des parallèles indépendante de toute considération étrangère à la géométrie élémentaire.

Je me dispenserai de toute critique à cet égard, je rappellerai seulement par la suite ce que M. Legendre a fait touchant cette fameuse théorie; cependant je soumets mon petit ouvrage au public qui décidera si mes recherches ont été aussi infructueuses que celles des autres.

On définit souvent les parallèles ainsi qu'il suit : deux lignes droites situées dans le même plan, qui sont par-tout également éloignées sont parallèles; cela est bien vrai, mais en adoptant la définition des parallèles d'Euclide, ce n'est qu'une condition du parallèlisme; et de ce qu'une ligne droite est également éloignée en deux points d'une autre, il ne suit pas de-là que cette ligne soit par-tout également distante; de même, de ce que deux lignes ne se rencontrent pas, on ne

---

parallèles d'Euclide, 1799. J'aurai occasion de parler de cet ouvrage par la suite.

doit pas conclure que ces deux lignes sont par-tout à même distance; car elles s'approchent peut-être l'une de l'autre sans se toucher, comme l'asymptote de l'hyperbole s'approche sans cesse de cette courbe sans jamais l'atteindre.

Dans tous les élémens de géométrie qui ont été publiés jusqu'à ce jour, on ne trouve aucune démonstration convaincante et *à priori* de cette proposition; *si une ligne droite est inégalement éloignée en deux points d'une autre, tous les points intermédiaires sont aussi inégalement éloignés de cette ligne.* Il en est de même de la proposition suivante; *si après avoir élevé sur une droite en deux points quelconques, deux perpendiculaires égales, on joint leurs extrémités par une ligne droite, toutes les perpendiculaires intermédiaires abaissées de la droite qui joint les extrémités des perpendiculaires externes sont égales entre elles.*

Il est incontestable que les trois sommets d'un triangle ne sont pas en ligne droite, et qu'ils sont inégalement éloignés d'une ligne droite qui serait située dans le plan même du triangle; car en appliquant la

base du triangle sur la ligne droite, la distance de cette ligne aux extrémités et à tous les autres points de la base est zéro; mais le sommet étant toujours au-dessus de la base, est par conséquent à une certaine distance de cette base ou de cette ligne droite. Il est réciproquement vrai que, trois points, également éloignés d'une ligne droite, sont dans une même ligne droite; car si ces points n'y étoient pas, ils formeroient les sommets d'un triangle, qui sont inégalement éloignés (1).

Par ce principe aussi simple qu'évident on pourroit démontrer (*à priori*) la proposition XV; mais la marche que j'ai adoptée prouvera que, *si deux points d'une ligne droite sont également éloignés d'une autre, tous les points intermédiaires sont aussi également éloignés de cette ligne.*

Dans les propositions XIV et XV je con-

---

(1) Il ne suit pas de là que trois points inégalement éloignés d'une ligne droite, ne sont pas en ligne droite. Mais j'exposerai par la suite que cela a lieu dans certaines circonstances.

sidère quelque fois qu'une ligne se meut sur une autre ; on m'opposera peut-être que le mouvement n'appartient pas à la géométrie ; mais on auroit tort de ne pas vouloir admettre des expressions qui ne tendent qu'a éclaircir les idées ; c'est dans cette vue, par exemple, que l'on considère une ligne engendrée par le mouvement d'un point, un solide l'est par le mouvement d'un plan.

Ce mouvement, abstraction faite de la force qui le produit et l'objet de la mécanique, n'est qu'un changement de position, et ne peut pour cette raison être étranger à la géométrie.

Cette seule considération suffira pour saisir la liaison des propositions qui servent d'introduction à la théorie des parallèles. Pour ne pas m'écarter trop du but que je me suis proposé, j'ai cité les élémens de géométrie de M. Legendre, parce que ses démonstrations s'y trouvent présentées dans un ordre qui convient parfaitement aux miennes. On trouvera en même temps des propositions bien connues, mais autrement démontrées que dans les élémens de géométrie de M. Legendre ; comme, par exemple, les

corrollaires des sixième et septième théorêmes, et les propositions depuis VIII jusqu'à XI. La raison en est, que ces propositions doivent servir de lemmes à celles qui me sont absolument nécessaires pour les recherches qui suivent.

Dans l'appendice, je crois avoir perfectionné le fond de la théorie des parallèles de M. Legendre; savoir : *que la somme des trois angles d'un triangle vaut deux angles droits.* La proposition XX de ses élémens (1) est très-simple, mais la démonstration géométrique qu'il en donne est moins rigoureuse que celle qu'il déduit des considérations analytiques (note deuxième de ces élémens). Cependant il me semble que des démonstrations qui reposent sur la théorie des fonctions, ne sont point de nature à être saisies facilement des commençans, et par conséquent n'est propre à entrer dans des élémens. Il faut donc que la théorie des parallèles soit exposée d'une manière plus élémentaire, et c'est ce que j'ai tâché de faire dans l'appendice.

---

(1) Voyez la quatrième édition des élémens de géométrie.

Comme je cherche à m'éclairer dans cette circonstance, j'engage les géomètres à me faire part de leurs objections relativement à la nouvelle théorie que j'expose, et je les prie sur-tout d'être indulgent envers un Allemand qui a, sans doute, laissé glisser un grand nombre de fautes de langue dans cet ouvrage.

Mayence, le 29 pluviôse an XI.

NOUVELLE THÉORIE DES PARALLÈLES.

AXIOMES ET PROPOSITIONS,

Qui servent d'introduction à la théorie des parallèles.

AXIOMES.

1. Deux quantités égales à une troisième sont égales entre elles.

2. Le tout est plus grand que sa partie.

3. Le tout est égal à la somme des parties dans lesquelles il a été divisé.

4. D'un point à un autre on ne peut mener qu'une seule ligne droite.

5. Les lignes et les surfaces sont égales, lorsqu'étant placées l'une sur l'autre elles coïncident dans toute leur étendue.

Propositions.

I. Les angles droits sont tous égaux entre eux.

II. Toute ligne droite qui en rencontre une autre, fait avec celle-ci deux angles adjacents dont la somme est égale à deux angles droits.

III. Si l'un de ces angles est aigu, l'autre doit être nécessairement obtus.

IV. Deux lignes droites qui ont deux points communs coïncident l'une avec l'autre dans toute leur étendue, et ne forment qu'une seule et même ligne droite.

V. Les angles opposés au sommet sont égaux.

VI. Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun.

FIG. 1. *Corollaire.* Supposons $AC = BC = ac = bc$; et l'angle C égal à l'angle c; appliquons la ligne BC sur bc de sorte que le point B tombe en b, le point C tombera en c; et parce que l'angle $C = c$, la droite AC tombera sur la direction ac; de même parce que AC est égal à ac, le point A tombera en a; et le triangle ABC est parfaitement égal au triangle abc; donc l'angle $A = a$ et l'angle $B = b$.

Mais parce que les quatre côtés AC, BC, ac, bc sont égaux entre eux, et l'angle C égal à l'angle c, on peut appliquer le triangle ABC sur le triangle abc, de manière que le point B tombant en a et C en c, la ligne AC doit coïncider avec bc, et le triangle ABC sera encore égal

au triangle *abc*; donc l'angle *B* égal *a*, et l'angle $A=b$; mais de ce que nous venons de démontrer, on a $A=a$; donc l'angle $A=B$, et l'angle $a=b$, c'est-à-dire, *dans un triangle isocèle les angles opposés aux côtés égaux sont égaux.*

VII. Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun.

Corollaire. Supposons les quatre angles *A*, *B*, FIG. *a*, *b*, égaux entre eux, et $AB=ab$, on aura le triangle *ABC* égal au triangle *abc*; donc $AC=ac$, et $BC=bc$.

Mais dans ce cas on peut aussi renverser la figure *ABC* et l'appliquer sur la figure *abc*, de sorte que le point *B* tombe en *a* et *A en b*, et les deux triangles seront encore égaux; donc $BC=ac$, et $AC=bc$; mais d'après ce que nous venons de démontrer on a $AC=ac$; donc le côté *BC* est égal au côté *AC*, et $bc=ac$; c'est-à-dire, *si deux angles sont égaux dans un triangle, les côtés opposés seront égaux, et le triangle sera isocèle.*

Remarque. Les démonstrations des propositions depuis I jusqu'à VII, se trouvent dans les élémens de géométrie de Legendre; mais les corollaires VI et VII ne s'y trouvent pas dans le même ordre, et je les ait fait succéder à ces propositions, parce qu'ils me serviront à déduire d'autres propositions.

PROPOSITION VIII.

Deux triangles sont égaux, lorsqu'ils ont les trois côtés égaux chacun à chacun.

Démonstration.

Joignez ces deux triangles avec deux côtés égaux, de manière que ces deux triangles soient toujours dans le même plan ; on aura trois cas.

FIG. 2 *a*. 1. Ou le point *a* tombe dans le prolongement de *AC*.

FIG. 2 *b*. 2. Ou la droite *Aa* tombe au-dessous du point *C*.

FIG. 2 *c*. 3. Ou la droite *Aa* tombe au-dessus du point *C*.

Premier cas. Lorsque $BA=ba$; on aura l'angle $A=a$ (1), de même $AC=ac$; donc le triangle *ABC* est égal au triangle *abc* (2).

Second cas. L'angle *BAC* est égal à la somme des angles *BAa*, *aAC*, ou l'angle $BAC=BAa+aAC$; de même l'angle $bac=baA+Aac$; mais lorsque les côtés *AC*, *ac* sont égaux, on a l'angle $aAC=Aac$, et lorsque $AB=ab$, on a l'angle $BAa=baA$; donc l'angle $BAC=bac$; donc le triangle *ABC* est égal au triangle *abc* (3).

Troisième cas. L'angle $BAC=BAa-CAa$; et l'angle $bac=baA-caA$; mais lorsque $AB=ab$ et $AC=ac$, on a l'angle $BAa=baA$, et l'angle $CAa=caA$; donc l'angle $BAC=bac$, donc le triangle *ABC* est égal au triangle *bac* (4).

---

(1) Proposition VI. Corollaire.
(2) Proposition VI.
(3) Proposition VI.
(4) Proposition VI.

Proposition IX.

Dans tout triangle ABC, si on prolonge le côté BC vers D, l'angle extérieur ACD est plus grand que l'angle intérieur BAC qui est opposé au côté prolongé ; c'est-à-dire l'angle $ACD > BAC$. FIG. 3.

Démonstration.

Divisez AC en deux parties égales ; par le milieu E tirez BF, et après avoir fait EF égal à BE, joignez les points F, C, par la droite FC. Lorsque le point F est au-dessus de BD, et entre AC et CD, la droite FC doit être nécessairement entre AC et CD ; conséquemment l'angle ACD doit être toujours plus grand que l'angle ECF.

Lorsqu'on a par la construction la ligne $AE = EC$, $BE = EF$, et l'angle $AEB = CEF$ (1), le triangle AEB est égal au triangle ECF (2), conséquemment l'angle BAE est égal à l'angle ECF; mais l'angle ACD est plus grand que ECF; donc l'angle $ACD > BAE$.

I. *Corollaire.* Prolongez AC vers G, on aura, d'après la proposition précédente, l'angle $BCG > B$; mais l'angle $BCG = ACD$; donc $ACD > B$; donc, dans un triangle, si on prolonge un côté, l'angle extérieur est plus grand que cha-

(1) Proposition V.
(2) Proposition VI.

cun des angles du triangle, excepté celui qui fait avec lui la somme de deux angles droits.

II. *Corollaire.* Lorsque les angles $ACB + ACD = 2R$ (R marquera désormais pour un angle droit), on aura $ACB + ABC < 2R$; car l'angle $ACD > ABC$, c'est-à-dire, *la somme de deux angles adjacens à un côté d'un triangle est plus petite que deux angles droits.*

III. *Corollaire.* Dans un triangle qui a un angle droit ou un angle obtus, chacun des deux autres angles doit être aigu; car supposons qu'il soit aussi droit ou obtus, la somme de deux angles adjacens à un côté, serait égale ou plus grande que deux angles droits (1).

FIG. 2. a. IV. *Corollaire.* D'un point B donné hors d'une droite Aa, on ne peut mener qu'une seule perpendiculaire à cette droite; car supposons qu'on puisse mener une autre perpendiculaire AB sur la même ligne droite Aa; on aura un triangle rectangle ABC qui aurait deux angles droits adjacens au côté AC, ce qui est impossible (2)

PROPOSITION X.

FIG. 4. De deux angles d'un triangle ABC, le plus grand est celui qui est opposé au plus grand côté; c'est-à-dire, au plus grand côté est opposé le plus grand angle.

---

(1) Proposition IX, corollaire 2.
(2) Proposition IX, corollaire 3.

Démonstration.

Supposons le côté $AC > AB$; faisons $AD = AB$, et joignons DB; le triangle ABD sera isoscèle; donc l'angle $ADB = ABD$ (1); mais l'angle ADB est plus grand que ACB (2); donc l'angle ABD est plus grand que ACB; à plus forte raison, l'angle ABC, doit être plus grand que l'angle ACB; car l'angle ABD sera toujours une partie de ABC, parce que le point D est placé entre CB et AB.

Proposition XI.

Dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté, c'est-à-dire, si l'angle $ABC > C$, on aura $AC > AB$. FIG. 4.

Démonstration.

Si le côté AC était égal au côté AB, l'angle ABC serait égal à l'angle C (3); mais les angles sont supposés inégaux; donc AC ne peut être égal à AB; on aurait par conséquent le côté AC ou plus petit ou plus grand que AB; mais si AC était plus petit que AB, l'angle ABC serait plus petit que l'angle C (4), ce qui est

---

(1) Proposition VI. Corollaire.
(2) Proposition IX.
(3) Proposition VI. Corollaire.
(4) Proposition X.

contre la supposition ; il faut donc que le côté AC soit plus grand que AB.

Proposition XII.

FIG. 5. Dans tout triangle, la somme de deux côtés est plus grande que le troisième, ou $AC+AB>BC$.

Démonstration.

Prolongez le côté AB, faites $AD=AC$, et joignez DC ; le triangle ADC sera isoscèle, donc l'angle $D=ACD$ (1) ; et lorsque le point A est placé entre D et B, l'angle ACD doit être nécessairement plus petit que DCB. Mais l'angle ACD étant égal à l'angle D, il faut que l'angle D soit de même plus grand que DCB ; dans le triangle DCB l'angle DCB étant plus grand que D ; on a par conséquent le côté $DB>BC$ (2), ou $AD+AB>BC$; mais $AD=AC$; donc $AC+AB>BC$.

FIG. 6. *Corollaire.* Toute ligne brisée, qui tourne son côté concave vers une ligne droite, dont les extrémités sont jointes avec cette ligne brisée, est plus grande que cette ligne droite, ou $BD+CD+AC>AB$. Car, tirons la diagonale BC, on aura $BD+DC>CB$: de même $CB+AC>AB$; donc $BD+DC+CB+AC>CB+AB$;

---

(1) Proposition VI. Corollaire.
(2) Proposition XI.

retranchant d'un côté et d'autre CB, il restera $BD+DC+AC>AB$.

Remarque. Pourvu que dans ce cas la ligne brisée ne soit composée que de quatre lignes droites, il est facile de voir comment on peut donner la démonstration pour une ligne brisée concave qui serait composée de plusieurs lignes droites ; il ne faudrait que tirer des diagonales d'un même point de la droite AB dans les angles de la ligne brisée.

On pourrait donner en même temps la démonstration pour une ligne brisée qui serait en partie concave et en partie convexe ; mais cette exposition m'écarterait trop du but proposé.

Proposition XIII.

Elevez sur la droite AB en A la perpendiculaire AC, et après avoir tiré la droite CD par le point C, de sorte que l'angle $ACD<R$, abaissez des perpendiculaires EF, GH, etc., des points E, G, etc., de la droite CD sur AB, lesquels points sont pris au côté de l'angle aigu ACD au-dessus de la droite AB, et déterminés par des perpendiculaires AE, FG, etc. menées des points A, F, etc., de AB sur CD ; je dis que toutes ces perpendiculaires, et toutes les autres abaissées sur AB des points de la droite CD placés entre C et E, ou entre E et G, etc., sont plus petites que AC, et toute suivante, plus petite que la précédente. FIG. 7.

Démonstration.

Lorsque *A* est un point hors de la ligne *CD*, on peut mener une perpendiculaire à cette droite; cette perpendiculaire ne peut tomber en *C*, parce qu'on aurait en *C* un angle aigu et un angle droit ensemble, de même elle ne peut tomber sur le prolongement de *CD*, par exemple en *R*; car en joignant *RA* on aura le triangle *ARC*, dont la somme des deux angles adjacents au côté *RC* sera plus grande que deux angles droits; savoir l'angle *R* étant droit et l'angle *RCA* obtus (parce qu'on a supposé l'angle *ACD* aigu); ce qui est impossible (1); donc cette perpendiculaire doit tomber à droite du point *C*.

Soit *AE* cette perpendiculaire. Lorsque l'angle *CAB* est un angle droit, l'angle *EAB* doit être plus petit; donc l'angle *OAE* plus grand qu'un angle droit (2), il faut donc qu'une perpendiculaire menée du point *E* sur *A B* doit tomber à droite du point *A*. Car si elle tombait en *A* on aurait deux perpendiculaires d'un même point *A* dans la droite *AB*; et si elle tombait dans le prolongement de *AB*, en O par exemple, elle formerait un triangle *OEA* dont la somme des deux angles adjacents au côté *OA* serait plus grande que deux angles droits, ce qui est impossible. (3) Soit donc

---

(1) Proposition IX. Corollaire 2.
(2) Proposition III.
(3) Proposition IX. Corollaire 2.

EF cette perpendiculaire, l'angle *AED* étant un angle droit, l'angle *FED* doit être nécessairement aigu (1), et une perpendiculaire depuis *F* sur *CD*, ne pouvant tomber en *E*, tombera à droite de *E*, en *G* par exemple; soit *FG* cette perpendiculaire. L'angle *AFE* étant un angle droit, l'angle *AFG* doit être plus grand; donc l'angle *GFB* plus petit qu'un angle droit; et la perpendiculaire *GH* depuis *G* sur *AB*, doit tomber à droite de *F*, et ainsi de suite.

Mais $AC>AE$; et $AE>EF$ (2); donc $AC>EF$ (*A*) on a de même $EF>FG$, et $FG>GH$; donc $EF>GH$ (*B*): en comparant (*A*) et (*B*) il suit $AC>GH$.

Il est facile de voir qu'on pourrait démontrer par un raisonnement entièrement semblable, que toutes les perpendiculaires menées des points de la droite *CD* sont devenues plus petites que *AC*, et toute suivante plus courte que la précédente. Mais ces points de la droite *CD* sont déterminés par les perpendiculaires menées de points de la droite *AB*; il reste donc à démontrer que la proposition a lieu pour toute perpendiculaire abaissée d'un point quelconque entre *C* et *E*, ou entre *E* et *G*; etc. Voici la démonstration :

Soit *G* un point déterminé par une perpendiculaire abaissée du point *A* sur la droite *CD*; et *GH* une perpendiculaire menée du point *G* à la droite FIG. 8.

(1) Proposition III.

(2) Proposition IX. Corrollaire 3 et proposition XI.

AB. Prenez entre *C* et *G* un point quelconque *E*, et abaissez sur *AB* la perpendiculaire *EF*, qui doit tomber entre *A* et *H*; car si elle tombait en *A* ou en *H*, on aurait par un même point donné sur une ligne droite deux perpendiculaires à cette ligne, ce qui est impossible ; et si elle pouvait tomber sur le prolongement de *AB* en *M* ou à droite du point *A* en *N*, par exemple, elle devrait couper les perpendiculaires *CA*, *GH* en des points quelconques *O*, *P*; mais dans ce cas on aurait deux perpendiculaires *OM* et *OA*, ou *PH* et *PN* de ces points d'intersection sur la droite *AB*, ce qui est impossible.

Tirez la droite *AE*; et lorsque l'angle *CGA* = *R*, l'angle *AEG* doit être plus petit (1), donc l'angle *CEA* plus grand (2) qu'un angle droit ; on a par conséquent *CA* > *AE* (3); mais *AE* est plus grand que *EF*, donc *CA* > *EF*.

Lorsque le point *E* étant pris à volonté entre *C* et *G*, il est facile à voir que la même démonstration aurait lieu pour toutes les perpendiculaires sur *AB* menées des points entre *C* et *G*. Mais ce qui a lieu pour toutes les perpendiculaires entre *C* et *G*, doit avoir nécessairement lieu pour toutes les perpendiculaires menées des points placés entre deux points de la droite *CD*, lesquels points

---

(1) Proposition IX. Corollaire 3.
(2) Proposition III.
(3) Proposition IX. Corollaire 3.

sont déterminés par les perpendiculaires menées des points de la droite AB sur CD.

Remarque. Tout ce que nous venons de démontrer dans la proposition précédente peut être appliqué seulement aux perpendiculaires, qui sont abaissées des points E, G, déterminés par des perpendiculaires menées des points A, F de la droite AB sur CD, et à toutes les perpendiculaires abaissées sur AB des points de la droite CD entre C et E ou entre E et G. Mais de-là ne suit pas encore que toute perpendiculaire MN, par exemple, menée d'un point quelconque M de la droite CD sur AB, soit plus petite que AC et plus grande que la suivante PQ. Pour le démontrer, il faut faire précéder les propositions suivantes. FIG. 7.

Proposition XIV.

Soit BD une ligne droite, et supposons qu'une perpendiculaire AB glisserait sur BD vers D, de manière que l'angle ABD reste toujours droit ; 1°. le point A décrira une ligne AC dont tous les points sont également éloignés de la droite BD ; 2°. cette ligne AC est une ligne droite. FIG. 9.

Démonstration.

Lorsque c'est la même perpendiculaire AB qui glisse sur la droite BD, le même point A décrit la ligne AC, et parce que la perpendiculaire mesure la distance d'un point hors d'une ligne droite

à cette ligne; 1°. le point *A* décrira une ligne dont tous les points sont également éloignés de la droite *BD*.

Cette ligne *AC* sera une ligne droite, si l'on peut démontrer, que trois points dans cette ligne où l'on veut les prendre, sont toujours dans une ligne droite. Car dans une ligne courbe trois points ne sont jamais dans une ligne droite; et dans une ligne brisée on peut toujours trouver trois points qui ne sont pas dans une ligne droite.

Mais supposons que trois points quelconques dans la ligne *AC*, n'étant pas en ligne droite, ces points représenteront les sommets d'un triangle, et ils seront par conséquent inégalement éloignés de la droite *BD*, ce qui est impossible, conséquemment si l'on prend trois points, parce que tous les points de la ligne *AC* sont également éloignés de *BD* dans la ligne *AC*, ces trois points doivent être en ligne droite; 2°. donc *AC* est une ligne droite.

FIG. 10.

PROPOSITION XV.

Soit *MN* une ligne droite; en différens points *A*, *B*, *C*, etc., élevez les perpendiculaires *AD*, *BE*, *CF*, etc. toutes égales entre elles, et joignez les points *D*, *E*, *F*, etc. par les droites *DE*, *EF*, etc. la ligne *DEF* sera une seule ligne droite.

Démonstration.

Pour savoir que *DEF* est une ligne droite, il faut démontrer que les trois points *D*, *E*, *F* sont dans une seule ligne droite.

Supposons maintenant que ces trois points ne

soient pas dans une ligne droite; il sera toujours possible de tirer une ligne droite par deux points D, F, entre lesquels on aura un troisième point E; Ce troisième point E, soit au-dessus ou au-dessous de la droite DF, doit se trouver dans la perpendiculaire BE.

Imaginons donc que la perpendiculaire AD glisserait sur MN vers N; de sorte que le point A étant arrivé en C, et par conséquent le point D en F, ce même point D a décrit une ligne droite. (1) Mais par deux points n'existant qu'une seule ligne droite, la droite DF coïncidera avec la ligne droite qui a été engendrée par le mouvement du point D de la perpendiculaire AD; et lorsque cette dernière ligne droite engendrée par le point D est partout également éloignée de la droite MN; il suit que toute perpendiculaire abaissée des points de la droite DF sur MN entre D et F, doit être égale à la perpendiculaire AD. (A)

Supposons à présent que le point E n'étant pas dans la droite DF; soit ce point au-dessus de cette ligne en G par exemple; c'est-à-dire, supposons que $BG=AD=CF$, on aura $BG>BE$; mais de ce que nous venons de démontrer (A) on a $AD=BE$; donc BG serait plus grand et en même tems égal à AD, ce qui est impossible; donc le point E ne peut pas tomber au-dessus de la droite DF.

On démontrera de la même manière que le point

---

(1) Proposition XIV.

E ne peut pas tomber au-dessous de la droite DF. Car supposé que $BH=AD=CF$; on a $BH<BE$, mais on a $BE=AD$ (A) ; donc $BH<AD$, donc BH serait en même tems plus petit et égal à AD, ce qui est impossible ; le point E qui tombe par conséquent ni au-dessus ni au-dessous de la droite DF doit tomber nécessairement dans cette ligne même ; donc la ligne DEF est une seule ligne droite.

Tout ce qui a été dit de ces trois perpendiculaires AD, BE, CF, doit avoir lieu pour toutes les autres perpendiculaires, pourvu qu'elles soient égales entre elles ; de là suit que la démonstration est générale.

Proposition XVI.

Si trois perpendiculaires élevées sur une droite sont inégales, leurs extrémités ne sont pas en ligne droite.

Démonstration.

Il y a plusieurs cas ; mais je n'exposerai que ceux qui me serviront pour le but proposé.

FIG. 10. *Premier cas.* Soit la première perpendiculaire AD et la troisième CF, chacune plus grande que la perpendiculaire BH qui a été prise entre les deux autres. Faites $AK=BH=CL$; et joignez KHL, la ligne KHL sera une ligne droite (1),

(1) Proposition XV.

et parce que $AD > AK$, et de même $CF > CL$, il suit que les points D et F ne sont pas dans la droite KHL; donc les trois points D, H, F, ne sont pas en ligne droite.

Deuxième cas. Soit la première perpendiculaire $AD > BH$ et la troisième $CL = BH$; faites $AK = BH = CL$, et joignez KHL; la ligne KHL sera une ligne droite (1); mais lorsque AD est supposée plus grande que AK, le point D est au-dessus de la droite KHL; donc les trois points DHL ne sont pas en ligne droite.

Troisième cas. Soit la première perpendiculaire AD plus petite que la seconde, et la seconde égale à la troisième. Prolongez AD, faites $DG = BE = CF$, et joignez GBC; la ligne GBC sera une ligne droite (2); lorsque le point A est au-dessus du point G, A n'est pas placé dans la droite GBC; donc les trois points A, B, C, ne sont pas en ligne droite. FIG. 11.

Quatrième cas. Soit la première perpendiculaire AD et la troisième CF, chacune plus petite que la seconde BE; les deux perpendiculaires AD, CF sont ou égales entre elles ou inégales; si elles sont égales, faites $EG = AD = CF$ et joignez AGC; la ligne AGC sera une ligne droite; et parce que le point B est au-dessus de la droite AGC, les trois points A, B, C, ne sont pas en ligne droite. FIG. 12. a. b. FIG. 12 a.

---

(2) Proposition XV.
(3) Proposition XV.

FIG. 12, b. Si elles sont inégales ; soit $AD>CF$; prolongez CF et faites $FH=AD=GE$, et joignez AGH, la ligne AGH sera une ligne droite ; et parce que le point B est au-dessus, le point C au-dessous de la droite AGH, les trois points A, B, C, ne sont pas en ligne droite.

PROPOSITION XVII.

FIG. 7. Si deux lignes AB, CD sont coupées par une troisième AC, de sorte que l'angle $CAB=R$ et l'angle $ACD<R$, et si des points quelconques M, P au-dessus de la droite AB on abaisse les perpendiculaires MN, PQ, etc. sur la droite AB, je dis que chacune de ces perpendiculaires est plus petite que AC, et toute suivante PQ plus petite que la précédente MN.

Démonstration.

Que les perpendiculaires MN, PQ doivent tomber de sorte que les points N, Q sont toujours plus éloignés du point A, c'est assez clairement exposé dans la proposition XIII, ainsi que la recherche sur les différentes dispositions que les perpendiculaires peuvent prendre menées des points de la droite AB sur la droite CD.

Menez d'abord la perpendiculaire AE depuis le point A sur la ligne CD, et depuis le point E abaissez la perpendiculaire EF sur la ligne AB. Le point M doit se trouver nécessairement ou entre C et E, ou en E même, ou à droite du point

E. Pour les deux premiers cas, voyez la démonstration de la proposition XIII. On y trouve démontré que la perpendiculaire *EF* est plus petite que *AC*, et que toutes les autres perpendiculaires abaissées des points entre *C* et *E* sur la ligne *AB*, sont plus petites que *AC*, et toute suivante plus petite que la précédente ; donc si la perpendiculaire *MN* est une de ces perpendiculaires, il suit qu'elle est plus petite que *AC*.

Supposons à présent que le point *M* est à droite du point *E* ; les trois points *C*, *E*, *M* sont dans la même ligne droite *CD* ; donc, parce que *AC* est plus grande que *FE*, la perpendiculaire *MN* ne peut être ni plus grande ni égale à *EF*, car si cela était, les trois points *C*, *E*, *M* ne seraient pas dans une ligne droite *CD*. (1) Donc *MN* doit être plus petite que *EF* ; et à plus forte raison plus petit que *AC*.

Le même raisonnement a lieu pour la perpendiculaire *PQ* ; et lorsqu'on a déjà $MN<AC$, il suit de même que si *PQ* est ou égale ou plus grande que *MN*, les trois points *C*, *M*, *P* ne seraient pas en ligne droite *CD* ; il faut donc que *PQ* soit plus petite que *MN*.

Proposition XVIII.

Elevez sur la droite *AD* la perpendiculaire *BF*, FIG. 12.

---

(1) Proposition XVI, 1er. et 2e. cas.

et tirez par le point *F* la droite *FM*, de sorte que l'angle *BFM* est plus grand qu'un angle droit : je dis que toute perpendiculaire abaissée sur *AD* d'un point de la ligne *FM* au côté de l'angle obtus *BFM*, est plus grande que *BF*.

Démonstration.

Prolongez *FM* vers *E*, les points *E*, *F*, *G*, *H*, etc. seront dans la même ligne droite *EM* ; et lorsque l'angle *BFM* est supposé plus grand qu'un angle droit, l'angle *BFE* doit être aigu (1) ; et lorsque l'angle *FBD* est droit, l'angle *FBA* doit l'être aussi ; il faut donc que toute perpendiculaire comme *EA* soit plus petite que *FB* (2). Du point *G* pris à volonté abaissez la perpendiculaire *GC* sur *AD*. Cette perpendiculaire ne peut tomber en *B* ; car si elle y tombait on aurait deux perpendiculaires d'un même point dans une ligne droite ; cette perpendiculaire ne tombera pas non plus dans le prolongement de *BD* en *P*, par exemple ; car elle couperait dans ce cas la perpendiculaire *BF* dans un point quelconque *O*, et si cela était on aurait deux perpendiculaires *OP*, *OB* d'un même point *O* hors d'une ligne droite sur cette ligne. Il faut donc que la perpendiculaire abaissée du point *G* sur *AB* tombe à droite du point *B*, en *C* par exemple.

Parce que l'angle *GCD* est un angle droit, la

---

(1) Proposition III.
(2) Proposition XVII.

perpendiculaire

perpendiculaire suivante HK ne peut tomber ni en C ni sur le prolongement de CD; par le même raisonnement, les points C, K, etc. s'éloignent par-conséquent toujours de plus en plus du point B.

Supposons maintenant $GC = FB$; parce que AE est plus petite que FB, les trois points E, F, G ne seront pas dans une même ligne droite (1). Ce qui est contre la supposition. Et si GC était plus petite que FB, parce que $AE < FB$, la perpendiculaire FB serait la plus grande entre les deux autres AE, GC, et les points E, F, G ne seraient pas dans une ligne droite (2).

La perpendiculaire GC n'étant par-conséquent ni égale ni plus petite que FB, doit être nécessairement plus grande que FB.

On démontrera par un raisonnement absolument semblable, que la perpendiculaire HK est plus grande que FB, et ainsi de suite.

Remarque. Par la proposition précédente il est assez clair que toute perpendiculaire abaissée des points de la droite FM sur BD est plus grande que FB. Mais il n'est pas encore démontré par là que toute perpendiculaire suivante est aussi plus grande que la précédente; on donnera cette démonstration dans le corollaire de la proposition XX.

Proposition XIX.

Si les droites AB, IK sont égales entr'elles et FIG. 9.

(3) Proposition XVI, 3e. cas.
(4) Proposition XVI, 4e. cas.

perpendiculaires sur AC, après avoir joint les points A, I, par la ligne droite AI, cette ligne fera en A et I des angles droits avec les deux perpendiculaires.

Démonstration.

Supposons que l'angle A ne serait pas encore droit, il sera ou aigu ou obtus ; mais s'il était aigu, la perpendiculaire IK serait plus petite que AB (1), et s'il était obtus on aurait IK plus grande que AB (2), or, on a supposé $AB=IK$, donc l'angle A ne peut être ni aigu ni obtus ; donc il est droit.

Ce que nous venons de démontrer pour l'angle A aura en même tems lieu pour l'angle I ; donc la ligne AI fait avec les deux perpendiculaires, des angles droits en A et I.

PROPOSITION XX.

FIG. 14. Elevez sur la droite AC les perpendiculaires AB, GE, de sorte que AB soit plus petite que EG; après avoir joint BG. 1°. Cette droite BG fera en B avec la plus petite perpendiculaire un angle plus grand qu'un angle droit ; et 2°. elle fera avec la plus grande en G, un angle plus petit qu'un angle droit.

Démonstration.

Prenez $EF=AB$, et joignez BF ; l'angle ABF

(1) Proposition XVII.
(2) Proposition XVIII.

doit être droit (1); et lorsque GE est supposée plus grande que AB, ou plus grande que FE, le point G se trouve au-dessus du point F; donc 1°. l'angle $ABG > ABF$, c'est-à-dire plus grand qu'un angle droit.

Lorsque $AB = EF$, l'angle BFE est droit (2); donc l'angle BFG est aussi droit, et le triangle BGF est rectangle; donc l'angle BGF est aigu (3); 2°. donc l'angle BGE, qui est formé par la plus grande perpendiculaire et la droite BG, est plus petit qu'un angle droit.

Corollaire : Si dans la proposition XVIII on a démontré que toutes les perpendiculaires, abaissées des points de la droite FM sur BD sont plus grandes que BF; on peut démontrer présentement que toute perpendiculaire suivante est plus grande que la précédente. Or on a $GC > BF$ (4); donc l'angle FGC doit être aigu (5), par-conséquent l'angle CGH est obtus; donc $HK > GC$: il est facile de voir comment l'on pourrait poursuivre la démonstration pour toute perpendiculaire suivante. FIG. 15.

Proposition XXI.

Soit BAC un angle aigu; abaissez des points FIG. 15.

---

(1) Proposition XIX.
(2) Proposition XIX.
(3) Proposition IX. Corollaire 3.
(4) Proposition XVIII.
(5) Proposition XX.

D, F, etc. d'un côté de cet angle les perpendiculaires DE, FG, etc. sur l'autre côté AC; je dis que toute perpendiculaire suivante est plus grande que la précédente.

Démonstration.

Abaissez la perpendiculaire DE sur AC d'un point D pris à volonté. Cette perpendiculaire ne peut tomber en A, parce qu'on aurait à ce même point A un angle droit et un angle aigu; elle ne peut tomber non plus sur le prolongement de AC en H par exemple; parce que si cela était on formerait un triangle AHD qui aurait un angle droit en H et un angle obtus en A (car l'angle BAC est supposé aigu) ce qui est impossible (1); donc la perpendiculaire DE doit tomber à droite du point A, et on a le triangle ADE rectangle en E. Or l'angle AED étant droit, l'angle ADE est aigu (2), par conséquent l'angle EDF obtus. Donc $FG > DE$ (3); de même $IK > FG$ (4), et ainsi de suite.

1. *Corollaire.* Lorsque les perpendiculaires depuis A vers B croissent toujours, elles doivent décroître depuis B vers A, puisqu'elles deviennent zéro en A; or une ligne qui se diminue jusqu'à

---

(1) Proposition IX. Corollaire 3.
(2) Proposition IX. Corollaire 3.
(3) Proposition XVIII.
(4) Proposition XX. Corollaire.

zéro doit devenir plus petite que chaque ligne donnée ; il faut donc que la ligne IK, dans son décroissement devienne $\frac{1}{2}\ IK$, $\frac{1}{4}\ IK$, $\frac{1}{8}\ IK$, $\frac{1}{16}\ IK$, etc., soit $DE = \frac{1}{16}\ IK$; il est donc réciproquement vrai que cette ligne DE, après avoir atteint la longueur IK, doit croître selon cette loi : $\frac{1}{16}\ IK$, $\frac{1}{8}\ IK$, $\frac{1}{4}\ IK$, $\frac{1}{2}\ IK$, IK. Mais on peut prolonger à l'infini les côtés de l'angle BAC, et prendre le point D à une distance quelconque de A ; les mêmes conditions ayant toujours lieu, l'on doit parvenir à des perpendiculaires depuis A vers C, qui sont entre elles comme les nombres 2, 4, 8, 16, etc.

2. *Corollaire* : Il suit de là que l'on peut parvenir à des perpendiculaires plus grandes que toute perpendiculaire donnée.

THÉORIE DES PARALLÈLES.

Définition. Deux lignes droites sont dites parallèles lorsqu'étant situées dans le même plan, elles ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre.

Remarque. En parlant désormais des lignes, j'entendrai par là, une fois pour toutes, des lignes droites situées dans le même plan.

PROPOSITION XXII.

FIG. 16. Si deux lignes AB, CD sont coupées par une troisième EF, de sorte que 1°. les deux angles intérieurs $NOB + OND$ font ensemble deux droites, ou 2° l'externe FOB est égal à l'interne OND, ou 3°. les alternes internes OND, AON égaux entre eux : les deux lignes AB, CD sont parallèles.

Démonstration.

1°. Si AB, CD se rencontraient dans un point quelconque au côté de la sécante EF vers B, D, elles formeraient un triangle, dont la somme des angles adjacents à la base ON serait égale à deux angles droits, ce qui est impossible (1).

(1) Proposition IX. Corollaire 2.

La somme des angles $NOB + NOA$ est égale à deux angles droits ; de même la somme des angles $OND + CNO$ est aussi égale à deux angles droits ; donc la somme des quatre angles $NOB + NOA + OND + CNO = 4R$; or, $NOB + OND$ est supposé égal à deux angles droits ; retranchant cette somme de l'autre, il reste $NOA + CNO = 2R$.

Il suit de là que les lignes AB, CD ne peuvent non plus former un triangle de l'autre côté de la sécante EF vers A et C; donc AB et CD ne peuvent se rencontrer à quelque distance qu'on les prolonge l'une et l'autre; *donc* 1°. *deux lignes* AB, CD *qui font avec une troisième* EF *la somme des angles intérieurs égale à deux droits, sont parallèles.*

2°. La somme des angles $FOB + NOB$ est égale à deux angles droits ; or on suppose $FOB = OND$, donc $OND + NOB$ est égale à deux angles droits, donc AB est parallèle avec CD, selon la démonstration précédente.

3°. La somme des angles $AON + NOB$ est égale à deux angles droits ; or on suppose $AON = OND$, donc $OND + NOB$ est égale à deux angles droits; donc AB est parallèle à CD.

Corollaire. Si on élève sur la droite MN les deux perpendiculaires MB, ND, elles seront parallèles, car la somme des deux angles intérieurs NMB, MND est égale à deux angles droits.

Proposition XXIII.

FIG. 9. Si deux lignes AC, BD sont perpendiculaires à une troisième AB, 1°. toutes les perpendiculaires abaissées des points E, G, I d'une de ces lignes sur l'autre BD, sont égales à la perpendiculaire AB; 2°. il est réciproquement vrai que si la perpendiculaire EF est égale à AB, le point E est dans la ligne AC.

Démonstration.

1°. Si une de ces perpendiculaires était plus grande ou plus petite que AB, l'angle BAC serait ou obtus ou aigu (1). Or BAC est un angle droit, donc les perpendiculaires EF, GH, IK, etc. sont ni plus grandes ni plus petites que AB; elles sont par-conséquent égales à la perpendiculaire AB.

2°. Supposons que le point E ne soit pas dans la ligne AC, si la perpendiculaire EF est égale à AB, ce point sera ou au-dessus ou au-dessous de cette ligne. Supposons qu'il soit au-dessous en M par exemple, tirez AM, lorsque $AB=FM$ l'angle BAM sera droit (2). Or l'angle BAC est droit selon la construction; on aura donc deux perpendiculaires d'un même point A dans le même plan sur AB, ce qui est impossible; donc le point E ne peut tomber au-dessous de AC; on démontrera

---

(1) Proposition XX.
(2) Proposition XIX.

de la même manière que le point E ne peut tomber au-dessus de AC, donc il tombe dans la ligne AC même.

Proposition XXIV.

Si deux lignes AB, CP sont coupées par une troisième AC, de sorte que l'angle $CAB = R$ et l'angle $ACP < R$, la ligne CP coupera AB au côté de l'angle aigu ACP. FIG. 17.

Démonstration.

Parce que l'angle $ACP < R$, on peut élever en C la perpendiculaire CF, donc CF est parallèle avec AB, et l'angle FCP est aigu ; les perpendiculaires MN, OP abaissées des points N, P de la ligne CP sur CF, deviennent toujours plus grandes (1), et il faut parvenir à en avoir une qui soit égale à celle donnée AC (2). Soit QR cette perpendiculaire qui est égale à AC; le point R sera dans la ligne AB (3), et la perpendiculaire suivante ST qui est plus grande que QR, doit avoir le point T au-dessous de AB. Mais de deux lignes droites situées dans le même plan, celle dont les extrémités sont à différens côtés de l'autre, coupe cette même ligne. Donc la ligne CD, ayant un point C au-dessus, et un point T au-dessous de la droite

---

(1) Proposition XXI.
(2) Proposition XXI. Corollaire 2.
(3) Proposition XXIII.

AB, située avec elle dansle même plan, a nécessairement coupé AB au point R.

1. *Corollaire.* Si deux lignes AB, CG sont coupées par une troisième AC, telles que l'angle $CAB=R$ et l'angle $ACG>R$; la ligne CG doit couper pareillement la droite AB; car, prolongez CG vers E; lorsque l'angle $ACG>R$ l'angle ACE sera plus petit qu'un angle droit; donc EC coupera AB au côté de l'angle aigu ACE (1).

FIG. 9

2. *Corollaire.* Deux lignes AC, BD étant parallèles par une construction quelconque; si du point G, on abaisse la perpendiculaire GH sur BD, l'angle IGH sera droit, car s'il était ou aigu ou obtus, la ligne GC couperait BD (2), ce qui est contre la supposition; donc l'angle IGH est droit; c'est-à-dire toute ligne perpendiculaire à l'une des parallèles, est perpendiculaire à l'autre.

Proposition XXV.

Si deux lignes sont coupées par une troisième, de sorte que la somme des deux angles intérieurs soit plus petite ou plus grande que deux angles droits, ces deux lignes se rencontreront.

Démonstration.

Soit d'abord la somme des deux angles intérieurs moindre que deux angles droits. Il y a trois cas :

---

(1) Proposition XXIV.
(2) Proposition XXIV. Corolaire 1.

I. Un de ces angles intérieurs est droit, l'autre aigu.

II. L'un des angles intérieurs est obtus, l'autre aigu.

III. Les deux angles intérieurs sont aigus.

1°. La démonstration du premier cas est donnée par la proposition XXIV.

2°. On suppose dans le second cas que l'angle $ACD > R$ est l'angle $CAF < R$, de sorte qu'on a $ACD + CAF < 2R$. FIG. 18.

Tirez la droite AB de manière que la somme des angles $ACD + CAB$ soit égale à deux angles droits; AB sera parallèle avec CD, et l'angle BAF doit être plus petit qu'un angle droit. Abaissez la perpendiculaire CG depuis C sur AB; cette perpendiculaire ne peut pas tomber en A, parce qu'on aurait à ce même point un angle droit et un angle aigu, ce qui est impossible; elle ne peut tomber non plus sur le prolongement de AB, en H par exemple; car, si elle y tombait, le triangle ACH ayant déjà un angle obtus CAH (parce que l'angle CAB est supposé aigu), l'autre H doit être aigu (1); donc la perpendiculaire CG doit tomber à droite du point A; soit en G.

Lorsque l'angle AGC est un angle droit et FAG aigu, la droite AF doit couper CG dans un point quelconque E (2). On aura alors le triangle

---

(3) Proposition IX. Corollaire 3.

(4) Proposition XXIV.

AGE rectangle en G; donc l'angle AEG doit être aigu (1) ; or AEG est égal à CEF ; ainsi l'angle CEF est en même tems aigu ; et parce que CG est une perpendiculaire abaissée du point C sur AB, l'angle GCD est aussi un angle droit (2) ; donc EF ou AF rencontrerait la ligne CD en un point quelconque.

FIG. 19. 3°. On suppose dans le troisième cas que chacun des deux angles CAF, ACD est plus petit qu'un angle droit.

Elevez sur AC au point C la perpendiculaire CF. Lorque l'angle ACF est droit, et CAF aigu, la droite CF doit couper AF (3) ; or l'angle ACD étant supposé aigu, la droite CD est entre AC et CF; mais CF coupe la ligne AF; à plus forte raison CD coupera AF.

Donc il est démontré dans les trois cas précédents que si deux lignes forment avec une troisième la somme des deux angles intérieurs plus petite que deux angles droits, ces deux lignes se rencontreront.

Soit présentement la somme des deux angles intérieurs plus grande que deux angles droits. Il y a trois cas :

I. L'un de ces angles est droit, l'autre obtus.

II. Chacun de ces angles est obtus.

III. L'un est obtus, l'autre aigu.

---

(1) Proposition IX. Corollaire 3.

(2) Proposition XXIV. Corrollaire 2.

(3) Proposition XXIV.

Soit généralement la somme des deux angles $ACG + CAF > 2R$; on aura toujours $ACG + ACE = 2R$, de même $CAF + CAK = 2R$; donc la somme des quatre angles $ACG + ACE + CAF + CAK = 4R$. Mais on suppose $ACG + CAF > 2R$. Donc les lignes EG, AF se rencontreront (1). FIG. 19.

Il est par-conséquent généralement démontré, que si deux lignes sont coupées par une troisième, de sorte que la somme des deux angles intérieurs est plus petite ou plus grande que deux angles droits ; ces deux lignes se rencontreront.

Corollaire. Par un point donné O on ne peut mener qu'une seule parallèle à la ligne donnée CD ; car il n'y a qu'une seule ligne AB qui fasse la somme des deux angles intérieurs égale à deux angles droits, et toute autre ligne GH ferait cette somme ou plus grande ou plus petite ; ainsi toute autre ligne GH rencontrerait la ligne CD (2) ; par-conséquent toute autre ligne ne serait pas parallèle avec CD ; donc par un point donné O on ne peut mener qu'une seule parallèle à la ligne donnée CD. FIG. 16.

Proposition XXVI.

Si deux lignes parallèles AB, CD, sont rencontrées par une sécante EF : 1°. la somme des FIG. 16.

---

(1) Proposition XXV.
(2) Proposition XXV.

deux angles intérieurs $OND + NOB$ est égale à deux angles droits.

2°. Les angles alternes-internes OND, MON sont égaux.

3°. Les angles internes-externes OND, FOB sont égaux.

Démonstration.

1°. Si la somme des deux angles intérieurs NOB, OND n'étant pas égale à deux angles droits, elle serait ou plus grande ou plus petite, conséquemment AB, CD se rencontreroient d'un côté ou de l'autre, et ne seraient pas parallèles; ce qui est contre la supposition; donc *la somme des deux angles intérieurs* NOB, OND *est égale à deux angles droits.*

2°. La somme des angles $MON + NOB$ est égale à deux angles droits; et de ce que nous venons de démontrer, la somme des angles intérieurs $NOB + OND$ est aussi égale à deux angles droits. Donc $MON + NOB = NOB + OND$; retranchant d'un côté et d'autre NOB, il restera $MON = OND$. Donc *les angles alternes-internes sont égaux.*

3°. Parce que $MON = OND$, et en même tems $MON = FOB$, on a $OND = FOB$; c'est à-dire *les angles internes-externes sont égaux.*

1. *Corollaire.* Lorsque $CNO + OND = 2R$; et $OND + NOB = 2R$ (1), on a $CNO + OND$

(1) Proposition XXVI. 1°.

$=OND+NOB$; retranchant à chaque côté OND, il restera $CNO = NOB$.

2. *Corollaire.* Lorsque $AOF+FOB=END+OND$ et $FOB = OND$ (1) ; retranchant d'un côté FOB et de l'autre son égal OND, il reste $AOF = END = CNF$.

3. *Corollaire.* $CNF+CNE=2R$; mais $AOF = CNF$, donc $AOF + CNE = 2R$.

4. *Corollaire.* $FOB + NOB = 2R$; mais $NOB = CNO$, donc $FOB + CNO = 2R$; or, $CNO = END$; donc $FOB + CNO = FOB + END = 2R$.

Proposition XXVII.

Deux parallèles sont par-tout également distantes.

Démonstration.

Abaissez des points quelconques F, R, E, O, etc, les perpendiculaires FH, RQ, EG, OP ; etc. si une de ces perpendiculaires, EG par exemple, était plus grande ou plus petite qu'une autre FH ; l'angle EFH serait ou plus grand ou plus petit qu'un angle droit (2) ; or tous les angles F, R, E, O, etc. sont droits (3) ; donc EG doit être égal à FH. On démontrera de la même manière que EG serait FIG. 20.

---

(2) Proposition XXVI. 3°.
(1) Proposition XX.
(2) Proposition XXIV. Corollaire 2.

égal aux perpendiculaires RQ, OP, et parce que la première perpendiculaire EG est prise à volonté, il est facile de voir que toutes ces perpendiculaires sont égales entre elles. Or les perpendiculaires FH, RQ, etc., mesurent la distance des points F, R, etc, dans la ligne AB, à la ligne CD, donc elles mesurent la distance de la ligne AB même, à la ligne CD, donc deux parallèles sont par-tout également distantes.

Proposition XXVIII.

Deux lignes qui sont parallèles à une troisième sont parallèles entr'elles.

Démonstration.

FIG. 20. Il y a deux cas :

1°. Si la troisième ligne CD est entre les deux autres.

2°. Si les deux autres sont au même côté de la troisième EF.

Tirez la sécante GH; si la troisième ligne CD est au milieu, on a l'angle $BIH = DKI$, parce que AB est parallèle à CD (1); de même, parce que CD est parallèle à EF on a l'angle $DKI = FLK$, donc $BIH = FLK$, donc AB est parallèle à EF (2). Si la troisième ligne EF est en dehors, on a, parce

(1) Proposition XXVI.
(2) Proposition XXVI.

que

que AB est parallèle à EF, l'angle $BIH = FLK$; de même parce que CD est parallèle à EF, l'angle $DIK = FLK$, donc $BIH = DKI$; donc AB est parallèle à CD.

Proposition XXIX.

Deux parallèles comprises entre deux autres parallèles sont égales.

Démonstration.

Soit AB parallèle à CD, et AC parallèle à BD. FIG. 22. Tirons la diagonale AD ; on aura l'angle $CAD = ADB$, de même $ADC = BAD$, et le côté AD commun ; donc le triangle ACD est égal au triangle ABD; donc $AB = CD$, et $AC = BD$.

FIN.

APPENDICE

CONTENANT *la manière de perfectionner la Théorie des Parallèles de A. M.* LEGENDRE.

APPENDICE.

La difficulté des parallèles, dont beaucoup de Géomètres français ont dissimulé de démontrer l'évidence, dans leurs cours de mathématiques, n'échappa point à l'esprit de Legendre. Il en fit déjà un essai dans son ouvrage intitulé : *Elémens de Géométrie, avec des notes, par* Adrien-Marie Legendre; *à Paris, chez* Firmin Didot. *An 2 de la république*, 1794, l'un des meilleurs livres de Mathématiques qui ait été publié en France sur la Géométrie élémentaire.

Ce que cet auteur fit alors, relatif à la théorie des parallèles a été suffisamment connu en allemand, par la traduction de l'ouvrage de L. Gilbert, intitulé : *La Géométrie selon Legendre;* Simpson, van Schwinden, Gregorius à St. Vincentio, et les anciens.

La proposition, que deux lignes droites, qui sont coupées par une troisième, de sorte que la somme des deux angles intérieurs étant plus petite que deux angles droits, se rencontreront, suffisamment prolongées; qui se trouve dans l'ouvrage de Legendre, mentionné ci-dessus, est entièrement changée dans la seconde édition de ses élémens.

Sa nouvelle théorie a pour base la proposition que la somme des trois angles d'un triangle est

égale à deux angles droits. A cet égard, il démontre d'abord que cette somme ne peut être ni plus grande ni plus petite que deux angles droits ; et il fait alors la conclusion que cette somme doit être égale à deux angles droits.

Monsieur Hauff, professeur de mathématiques à Marburg, a suivi ce même chemin dans sa théorie des parallèles, publiée dans le magasin de mathématiques pures et appliquées ; il y a donné une démonstration de cette proposition d'une manière plus directe que celle de Legendre, et quoiqu'il n'ait pas réussi avec, elle mérite pourtant d'être connue. La voici :

FIG. 23. Dans le triangle ABC, la somme des trois angles A, B, C, est égale à deux angles droits.

Démonstration. Divisez le côté AC du triangle ABC en deux parties égales au point D, et après avoir tiré BD et prolongé ; faites $DF=BD$, joignez FC et FA. Lorsque $AD=DC$, $BD=DF$, et l'angle $ADF=BDC$, on aura $AF=BC$; l'angle DAF sera en même temps égal à l'angle DCB, et l'angle $AFD=DBC$; lorsque $AD=DC$, $BD=DF$ et l'angle $ADB=CDF$, on aura $AB=FC$, l'angle $ABD=DFC$ et $DAB=DCF$; lorsqu'enfin $BC=AF$, $AB=FC$ l'angle $DBC=AFD$ et $ABD=DFC$; donc l'angle $ABC=AFC$, on aura le triangle ABC égal au triangle AFC. Si on décrit alors sur le côté BC le triangle BCG par une construction entièrement semblable à la précédente ; on peut facilement démontrer que le triangle ABC est en

même temps égal au triangle BCG; et parce qu'on a déjà démontré que le triangle $ABC = AFC$, on aura le triangle $ACF = ABC = BCG$; donc l'angle $ACF = BAC = A$; l'angle $BCG = ABC = B$; donc $ACF + ACB + BCG = A + B + C$; or si FCG étoit une ligne droite, on aurait $ACF + ACB + BCG = 2R$ (R marque un angle droit); donc $A + B + C = 2R$.

Mais on peut démontrer que FCG est une ligne droite par la manière suivante :

Supposons maintenant que FCG n'étant pas en ligne droite, il faut que FC et CG étant des lignes droites, celle FG depuis F en G passe ou au-dessus ou au-dessous du point C. Dans le dernier cas, cette ligne aurait une situation comme FHG; soit donc FHG cette ligne droite, elle formerait avec FC, CG un triangle isoscèle. Divisez la base FHG de ce triangle en deux parties égales au point H, et tirez depuis le sommet C la droite CH. D'un point quelconque I de la droite CH abaissez une perpendiculaire sur CG; lorsque l'angle $FCG < 2R$ par la supposition, et $FH = GH$, l'angle HCG sera $< R$; cette perpendiculaire doit tomber à droite de la ligne CH, et prendre une direction comme celle de IK; soit donc IK, cette perpendiculaire, parce qu'elle a le point I dans le triangle, elle doit couper suffisamment prolongée encore une fois le contour du triangle. Prolongez donc CK vers L, et supposons qu'elle coupe la base du triangle au point L, abaissez alors d'un point quelconque

de la ligne AB, de A, par exemple la perpendiculaire AM sur LK, et joignez AK; parce que l'angle $AMK = R$, de même $MKC = R$ (par construction), et l'angle $AKM > MKC$, on aura $AMK + AKM > 2R$, ce qui est impossible (1). Si l'on voulait supposer que le prolongement de IK passerait par le sommet F de l'angle CFH, ou par le côté CF, le même raisonnement aurait lieu. Donc la ligne droite depuis F en G ne peut passer au-dessous du point C; un raisonnement entièrement semblable au précédent, démontrera que cette ligne ne peut passer au-dessus de ce même point C; donc elle doit passer par le point C. Mais si elle y passe elle ne peut pas être autre que FCG; donc FCG est une ligne droite, et par conséquent $A+B+C$ est égal à deux angles droits.

Je ne critiquerai point cette démonstration de M. Hauff; j'en laisse le jugement à des mathématiciens savans; avec la seule remarque, qu'il ne prend la direction de la perpendiculaire AM qu'arbitrairement, et il ne peut jamais démontrer qu'elle doit prendre la direction à gauche de l'angle obtus AKM, ce qu'il suppose pourtant.

On voit par-là en même temps comme la difficulté de pousser la théorie des parallèles à ce degré d'évidence qu'elle exige, se réduit toujours

(1) Proposition IX. Corollaire 2.

à une autre difficulté, dont la solution semble être plus facile qu'elle ne l'est.

Je me permettrai maintenant d'exposer mes doutes sur la théorie des parallèles de Legendre, qui, aussi ingénieuse qu'intéressante, a pour base la proposition que la somme des trois angles d'un triangle est égale à deux angles droits. A cet égard, il démontre dans la Proposition XIX de ses élémens de géométrie, que la somme des trois angles d'un triangle ne peut être plus grande que deux angles droits; et il expose dans la Proposition XX, que dans tout triangle la somme des trois angles ne peut être plus petite que deux angles droits. Mais c'est précisément cette dernière proposition, comme je crois, qui détruit entièrement cette théorie; et pour mieux faire sentir la lacune qui s'y est glissée, je placerai ici quelques phrases de cette proposition avec ses propres paroles : « Soit ABC le triangle pro- FIG. 24.
» posé, et soit, s'il est possible, la somme de
» ses angles $= 2P - Z$; P désignant un angle
» droit, et Z étant la quantité quelconque, dont
» on suppose que la somme des angles est plus
» petite que deux angles droits.

» Soit A le plus petit des angles du triangle
» ABC, sur le côté opposé BC, faites l'angle
» $BCD = ABC$, et l'angle $CBD = ACB$; les
» triangles BCD, ABC seront égaux, comme
» ayant un côté égal BC adjacent à deux angles
» égaux chacun à chacun. Par le point D, tirez
» une ligne droite quelconque EF, *qui rencontre*

» *en E et F les deux côtés de l'angle A pro-*
» *longé.* »

Après avoir exposé que dans le triangle AEF, qu'il suppose être formé par la ligne tirée par le point D ; la somme des angles ne peut pas excéder $2P - 2Z$; il construit semblablement un troisième triangle, et par le moyen de ce troisième triangle, un quatrième, et ainsi de suite.

Mais cette ligne, passant par D, est ou construite avant que les côtés AB, AG soient prolongés, ou ces mêmes côtés sont prolongés d'abord, et l'on tire après une ligne droite par le point D. Rien ne détermine dans le premier cas, que la ligne tirée par le point D coupera un des côtés prolongés, car l'on n'a ni donné la direction de cette ligne, ni l'angle qu'elle fera avec une autre ligne.

Supposons donc que les cotés AB, AC soient prolongés avant que la ligne ne soit tirée par le point D. Dans ce cas, on peut bien prendre un point quelconque F, et tirer par les points F, D, une ligne droite FD ; mais comment veut-on alors démontrer que le prolongement de cette ligne FD coupera le côté AB prolongé. Elle s'approche à la vérité de plus en plus de la ligne AE; mais peut être asymptotiquement, de sorte qu'elle ne rencontrera jamais AE. Donc on ne peut pas démontrer de ce qu'en prenant en AF un point quelconque F, on ne peut démontrer, dis-je, que la droite tirée par le point D coupera à la fois les deux côtés prolongés du triangle.

Si l'on voulait déterminer deux points e, F dans les prolongemens de AB, AC, et tirer des lignes

droite eD, FD, au point D; dans ce cas, on ne peut savoir si eDF est une ligne droite, et supposant que eDF ne soit pas une ligne droite, on pourrait bien prolonger DF, et ce prolongement fD tomberait ou au-dessus ou au-dessous de la droite eD; supposons d'abord qu'il tombe au-dessous, on pourrait abaisser le point e, de sorte que l'angle eDf deviendrait de pas à pas plus petit; mais ne connaissant pas la loi de cette décroissance, on ne peut savoir quand cet angle deviendrait égal à zéro, ce qui est pourtant nécessaire, pour pouvoir déterminer un point quelconque sur AE, par lequel, et celui D, une ligne droite étant tirée, elle coïncide avec fD, qui est le prolongement de DF; le même raisonnement aura lieu si le prolongement de FD tombait au-dessus de De. Donc je ne vois aucun moyen dans toutes les propositions qui ont précédé la proposition XX, comment l'on pourrait démontrer qu'une ligne, tirée par le point D, rencontrerait à la fois les côtés prolongés du triangle.

Je sais bien ce que M. Legendre dit, dans une note jointe à la proposition XX de ces Elémens; savoir : « On suppose que A est le plus petit des » angles du triangle ABC, et qu'en conséquence » il est moindre ou non plus grand que deux » tiers d'angle droit, *afin de rendre plus sensi-* » *ble la possibilité qu'une ligne droite menée par* » *le point D rencontre à la fois les deux côtés* » AB, AC *prolongés*.

Mais comment le plus petit angle A pourrait-il empêcher que la ligne droite menée par le

point D ne s'approche qu'asymptotiquement d'un des côtés AB, AC prolongés ? Si la moindre distance des côtés de l'angle A était la cause que cette ligne coupât à la fois les deux côtés prolongés ; comment peut-on alors rendre sensible cette intersection pour des distances des côtés de l'angle A plus grandes ; lesquelles distances plus grandes doivent toujours avoir lieu, puisqu'il construit beaucoup de triangles entre les cotés AB, AC prolongés ; cette note est d'autant plus étonnante, que dans la géométrie il faut plutôt démontrer que sentir ; et M. Legendre n'a donné aucune démonstration qui puisse justifier la supposition que la ligne menée par le point D, rencontre à la fois les côtés prolongés du triangle.

Voyons donc comment on pourrait suppléer à cette théorie de M. Legendre, à l'égard de la proposition XX, et pour cela, je proposerai deux manières, dont l'une, comme je crois, est aussi sûre que l'autre.

Les voici :

La première consiste en cela, qu'on pourrait donner la démonstration de la proposition XX entièrement semblable à celle de la proposition XIX. Mais il faudrait démontrer d'abord que $BDFHyy$ est une ligne droite.

L'angle BAC est ou droit, ou obtus, ou aigu ; si cet angle est droit, toutes les perpendiculaires $AB, CD, EFyy$ étant égales, la ligne $BDFHyy$ sera une ligne droite (voyez la proposition XV de ma théorie des parallèles).

Supposons maintenant que l'angle BAC soit aigu; abaissez sur AP des points B, D, F, Hyy, les perpendiculaires $Bb, Dd, Ff, Hhyy$ qui tomberont au coté de l'angle aigu, et on formera les triangles rectangles ABb, DCb, $FEfyy$ qui sont tous égaux entr'eux; car, imaginons que les deux lignes droites AB, CD égales, sont posées l'une sur l'autre de manière que A est en C et B en D, la ligne Ab prendra la direction de Cd, puisque l'angle A est égal à l'angle C; et si le point b tombait ou à droite ou à gauche du point d, on aurait deux perpendiculaires Bb, Dd, d'un même point hors d'une ligne droite sur cette ligne; donc le point b tombera en d; donc $Bb = Dd$.

On démontrera par un raisonnement entièrement semblable, que Dd est égal à Ff, de même que Ff est égal à Hh, et ainsi de suite; c'est-à-dire, qu'on peut facilement démontrer que $Bb = Dd = Ffyy$; donc toutes ces perpendiculaires étant égales entr'elles, la ligne $BDFHyy$ doit être une ligne droite (voyez la proposition XV de ma théorie). Si l'angle BAC est obtus, son supplément sera aigu, et le même raisonnement aura lieu pour les perpendiculaires qui tomberont à gauche de l'angle obtus BAC. Donc quelque soit la direction que prennent les lignes AB, CD, $EFyy$, pourvu que ces lignes soient toutes égales entr'elles, la ligne $BDFH$ menée par les extrémités B, D, Fyy, sera une ligne droite.

Cela posé, on peut bien démontrer que la somme des trois angles d'un triangle ne peut pas être plus petite que deux angles droits.

FIG. 25. Car supposons que la somme des trois angles d'un triangle soit plus petite que deux angles droits ; c'est-à-dire, supposons qu'on ait $BAC+ABC+ACB<2R$, on aura $BAC+ABC+ACB<ACB+BCD+DCE$ (parce que $ACB+BCD+DCE=2R$) ; retranchant à chaque côté ACB et $BAC=DCE$, il restera $ABC<BCD$, et lorsque $AB=CD$ et $BC=DE$, on aura $BD>AC$ (voyez la proposition X des élémens de géométrie de M. Legendre). Soit $BD-AC=D$, on aura $2BD-2AC=2D$; c'est-à-dire $BF+AE=2D$; de même $BH-AG=3D$; $BK-AI=4D$, et ainsi de suite ; or quelque petit que soit D, il est évident que cette différence, répétée un nombre de fois suffisant, deviendra plus grande que toute ligne donnée.

Il est donc clair qu'on pourrait supposer la suite des triangles prolongée assez loin pour qu'on ait $BQ-AP>2AB$, et ainsi on aura $BQ>AP+2AB$ ou $BQ>AB+AP+PQ$ (parce que $AB=PQ$) ce qui est impossible, parce que BQ est une seule ligne droite, selon ce que avons démontré ci-dessus ; il est par conséquent impossible que la somme des trois angles d'un triangle soit plus petite que deux angles droits, et cette somme ne pouvant non plus excéder deux angles droits elle doit être égale à deux angles droits.

Remarque. On pourrait encore opposer à la XIX démonstration de Legendre, que la série D, $2D$, $3D$, $4Dyy$ est trop peu divergente ; par exemple, si l'on supposait $D=\frac{1}{1000}$, on formerait déjà mille termes pour avoir l'unité ; combien de

termes ne faudrait-il pas former pour avoir seulement une grandeur médiocre ? mais la différence du premier et du dernier terme d'une progression arithmétique étant donnée, on trouvera le nombre des termes, par conséquent on peut toujours déterminer combien de termes suffiraient, afin que le dernier fût égal à une certaine quantité donnée ; et chaque terme suivant étant plus grand que le précédent, il est facile de voir que l'on pourrait en trouver un dans la progression arithmétique D, $2D$, $3Dyy$ qui serait plus grand qu'une quantité donnée.

La seconde manière de suppléer à la théorie de M. Legendre est plus directe et immédiatement appliquable à sa démonstration.

Car on peut actuellement démontrer que la ligne droite menée par le point D, doit couper à la fois les côtés AB, AC prolongés.

Pour cet effet, rappelons-nous ce qui a été FIG. 20. démontré dans la proposition XXIV de ma théorie des parallèles ; savoir : si deux lignes sont coupées par une troisième, telle qu'une d'elles faisant un angle droit, l'autre un angle aigu avec la seconde, elles doivent se rencontrer en un point quelconque. Or, M. Legendre suppose que l'angle A est le plus petit des trois angles du triangle donné (ce qui est toujours possible) ; donc l'angle A est toujours un angle aigu ; joignez AD, lorsque le point D est entre les côtés AB, AC prolongés ; les angles DAC, DAB seront aigus (car ils ne sont que des parties d'un angle aigu). Au point D, élevez sur AD la perpendiculaire

DF; or les lignes AC, DF, étant coupées par une troisième AD, de manière que, d'après la proposition citée ci-dessus, elles doivent se couper en un point quelconque F; de même, si l'on prolonge la perpendiculaire DF vers E, l'angle ADE sera droit; or l'angle BAD est aigu, donc DE est le prolongement de AB, donc ils doivent se couper en un point quelconque E; mais ED étant le prolongement de DF, EDF est une ligne droite; donc la ligne menée par le point D doit couper à la fois les côtés AB, AC prolongés.

Il est facile de voir que le même raisonnement aura lieu pour tous les autres triangles dont les sommets tombent entre les côtés AB, AC prolongés, et par conséquent la démonstration est générale.

Il est à présent rigoureusement démontré dans la théorie de M. Legendre; 1°. que la somme des trois angles d'un triangle ne peut pas excéder deux angles droits; 2°. qu'elle ne peut être plus petite : il faut donc que cette somme soit égale à deux angles droits. Et parce que les propositions suivantes de M. Legendre ne sont qu'une ingénieuse application de ce théorême; je renvoie mes lecteurs aux Elémens de Géométrie de cet Auteur, pour voir la suite de sa théorie, qui fixera sans doute l'attention des Mathématiciens.

Signé, ADOLPHE KIRCHER, Médecin.

FIN.

68737
S6N

Fig. 3.

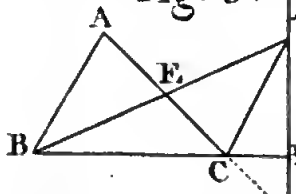


Fig. 6.

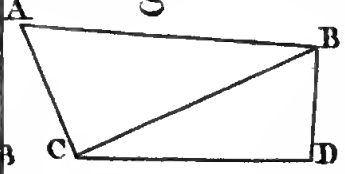
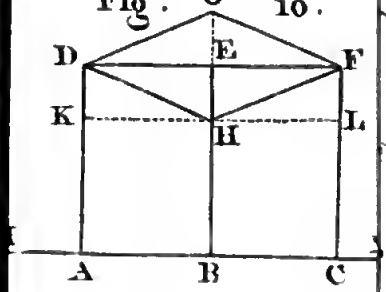
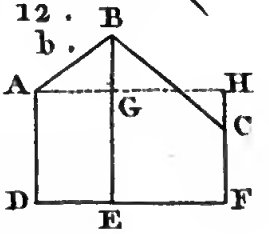


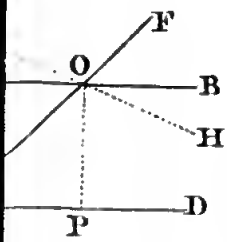
Fig. 10.



12. b.



g. 16.



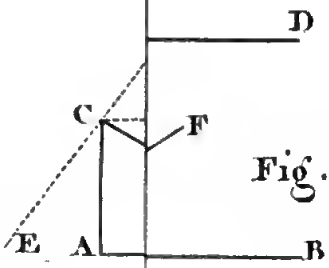


Fig. 18.

Fig. 21.

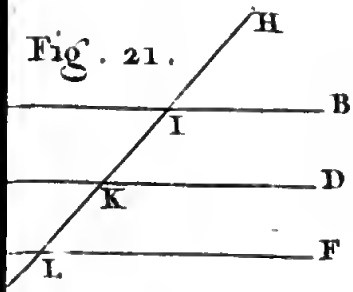
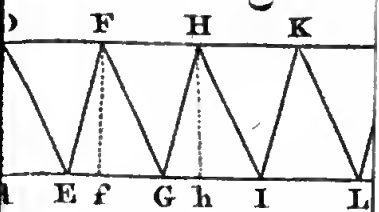
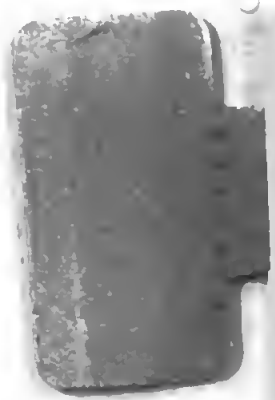


Fig. 25



BIBLIOTECA



BIBLIOTECA